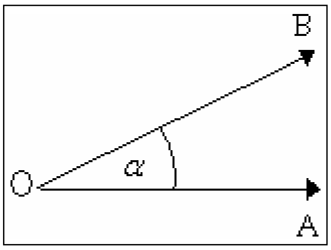
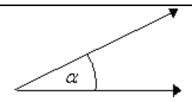
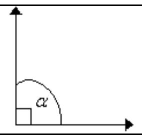
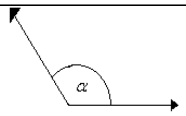
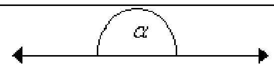
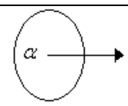
Conceptos previos

Definición

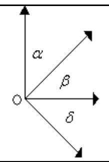
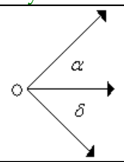
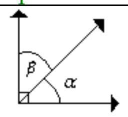
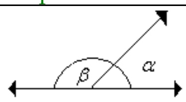
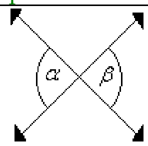
Ángulo: α
Vértice: O
Lados: OA y OB



Clasificación

Agudo	Recto	Obtuso	Extendido	Completo
$0^\circ < \alpha < 90^\circ$	$\alpha = 90^\circ$	$90^\circ < \alpha < 180^\circ$	$\alpha = 180^\circ$	$\alpha = 360^\circ$
				

Posiciones relativas

Ángulos consecutivos	Ángulos adyacentes	Ángulos complementarios	Ángulos suplementarios	Ángulos opuestos por el vértice
		 $\alpha + \beta = 90^\circ$		

Un ángulo se mide en sentido antihorario positivo y/o negativo según la ubicación de este. Toda medida se hace por comparación con otra que se toma como unidad.

Sistemas de medición

- Sistema sexagesimal: unidad grado-sexagesimal (º).

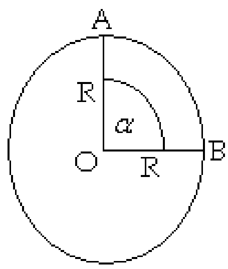
Corresponde a la 1/360 parte de una circunferencia del radio arbitrario.
Submúltiplos: Minuto sexagesimal (´) $\boxed{1 = 60´}$ Segundo sexagesimal (´´) $\boxed{1´= 60´´}$
1º grado equivale a 3600 segundos.

- Sistema centesimal: unidad grado centesimal (g).

Corresponde a la 1/400 parte de una circunferencia de radio arbitrario.
Submúltiplos:
Minuto centesimal (min.): 1=100"
Minuto centesimal (min.): 1=100"

- Sistema circular o Radian:

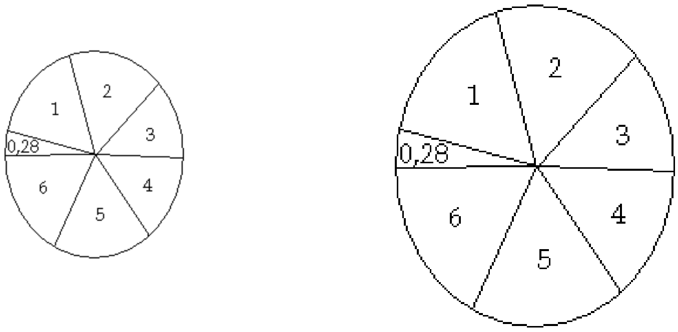
Radian es un ángulo central cuyo arco subtendido mide linealmente lo mismo que el radio.
O: centro
OA=OB=R
α : Ángulo central



AB es el arco subtendido por α si la medida del radio R, es decir, M (AB) = R, entonces se define como un radian.

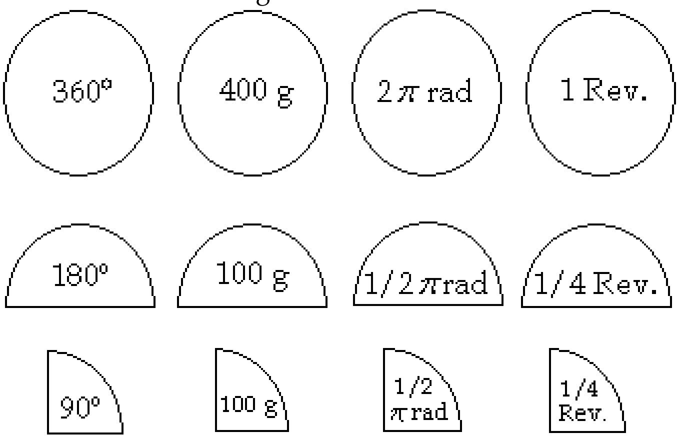
Pero a partir de esta definición de radian, NO depende del radio. Se comprueba que el radian esta contenido aproximadamente 6,28 veces en una circunferencia, por lo tanto, es válido afirmar que esta contiene 2π veces en la misma.

Ejemplo:

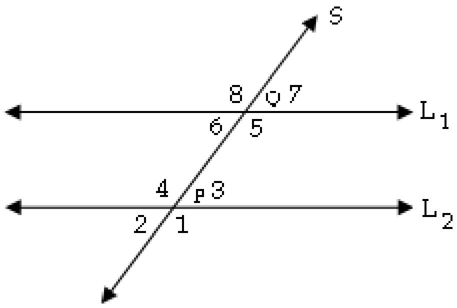


Entonces, se puede afirmar las siguientes equivalencias:

360º = 400 g = 2rad. = 1 revolución



Ángulos entre paralelas cortadas por una secante:



$L_1 // L_2$
S: secante.

Se observa en la figura:

1) Dos puntos de intersección, P y Q.
2) Cuatro pares de ángulos en cada punto, 8 en total.
3) Ángulos internos: éstos se ubican en el semiespacio limitado por las rectas paralelas 3, 4, 5 y 6.
4) Ángulos externos: son los que no están en el semiespacio limitado por las rectas paralelas.

5) Ángulos alternos internos: son dos pares de ángulos internos de lados contrarios a la secante: 6 y 3, 5 y 4.
6) Ángulos alternos externos: son dos pares de ángulos externos de lados contrarios a la secante: 1 y 8, 2 y 7.
7) Ángulos correspondientes: son pares de ángulos, los dos internos o los dos externos pero del mismo lado de la secante: 1 y 6; 4 y 8; 3 y 7; 2 y 6.
8) Ángulos conjugados: son pares de ángulos, ambos pueden ser internos o externos, pero del mismo lados de la secante: 3 y 5, 2 y 7, 1 y 8, 4 y 6.
9) Ángulos opuestos por el vértice: 5 y 8, 6 y 7,4 y 1,2 y 3.
10) Se verifican las siguientes relaciones métricas:

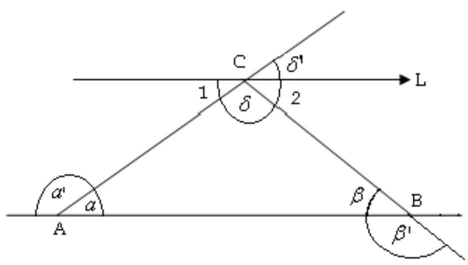
- Son ángulos iguales:

$$\boxed{\begin{aligned}\angle 1 &= \angle 7\\ \angle 2 &= \angle 8\\ \angle 3 &= \angle 6\\ \angle 4 &= \angle 5\end{aligned}} = \text{alternos} \quad \boxed{\begin{aligned}\angle 1 &= \angle 3\\ \angle 2 &= \angle 5\\ \angle 3 &= \angle 7\\ \angle 4 &= \angle 8\end{aligned}} = \text{correspondientes} \quad \boxed{\begin{aligned}\angle 1 &= \angle 3\\ \angle 2 &= \angle 4\\ \angle 5 &= \angle 8\\ \angle 6 &= \angle 7\end{aligned}} = \text{opuestos por el vértice}$$

- Son ángulos suplementarios:

$$\boxed{\begin{aligned}\angle 1 + \angle 8 &= 180^o\\ \angle 2 + \angle 7 &= 180^o\\ \angle 3 + \angle 5 &= 180^o\\ \angle 4 + \angle 6 &= 180^o\end{aligned}} = \text{conjugados} \quad \boxed{\begin{aligned}\angle 1 + \angle 2 &= 180^o\\ \angle 2 + \angle 3 &= 180^o\\ \angle 3 + \angle 4 &= 180^o\\ \angle 1 + \angle 4 &= 180^o\\ \angle 5 + \angle 6 &= 180^o\\ \angle 5 + \angle 7 &= 180^o\\ \angle 6 + \angle 8 &= 180^o\\ \angle 7 + \angle 8 &= 180^o\end{aligned}} = \text{suplementarios}$$

Los ángulos en el triangulo



α,β,δ: Ángulos interiores.
$\alpha^{\cdot},\beta^{\cdot},\delta^{\cdot}$: Ángulos exteriores.

Tenemos L//AB; lo que definen los ángulos $\angle 1$ y $\angle 2$.
Se observa que $\angle 1 = \alpha, \angle 2 = \beta$ son alternos internos entre paralelas, pero lo cual substituimos:

$$\text{Además:}\boxed{\begin{aligned}\alpha + \alpha &= 180^o\\ \beta + \beta &= 180^o\\ \delta + \delta &= 180^o\end{aligned}}$$

$$(\alpha+\beta+\delta)+(\alpha'+\beta'+\delta')=180^{o}+180^{o}+180^{o}$$

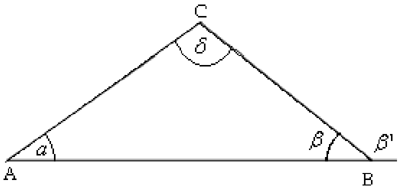
$$180^{o}+\alpha'+\beta'+\delta'=180^{o}+180^{o}+180^{o}$$

$$\boxed{\alpha'+\beta'+\delta'=360^{o}}$$

Regla general: Los ángulos interiores de un triangulo cualquiera suman 180º, y los ángulos exteriores, 360º.

Teoremas importantes

1. En todo triangulo, un ángulo exterior equivale a la suma de los interiores no adyacente.

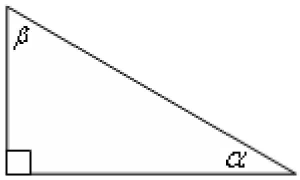


β' =exteriores

$\alpha-\beta$ =interiores no adyacentes

$\boxed{\beta'=\alpha+\delta}$

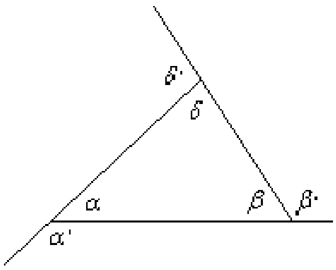
2. En todo triangulo rectángulo, la suma de los ángulos agudos equivale a un ángulo recto.



α y β =ángulos agudos.

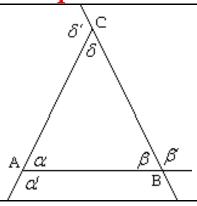
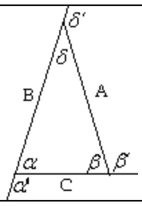
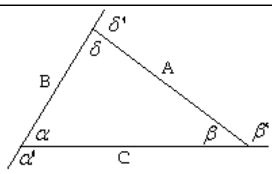
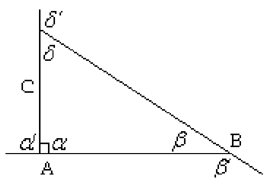
$\boxed{\alpha+\beta=90^{o}}$

3. En todo triangulo , los ángulos la suma de los ángulos exteriores corresponde a dos ángulos extendidos



$$\alpha'+\beta'+\gamma'=360$$

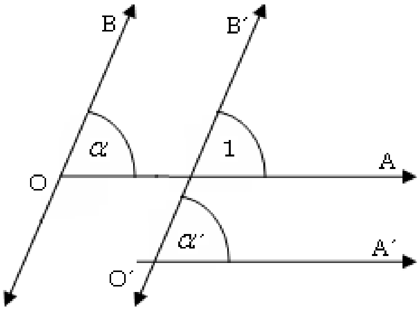
Tipos de triangulo y sus respectivos elementos

Equilátero	Isósceles	Escaleno	Rectángulo
			
3 lados iguales y 3 ángulos iguales	Dos lados iguales y ángulos basales iguales	Todos los lados son distintos	Un ángulo recto, con dos lados que forman un ángulo recto (catetos), y un lado opuesto a éste (hipotenusa)
$\alpha+\beta+\delta=180^{o}$ $\alpha'+\beta'+\delta'=360^{o}$	$\alpha+\beta+\delta=180^{o}$ $\alpha'+\beta'+\delta'=360^{o}$	$\alpha+\beta+\delta=180^{o}$ $\alpha'+\beta'+\delta'=360^{o}$	$\alpha+\beta+\delta=180^{o}$

Ángulos de lados paralelos

Caso 1: Ambos son agudos

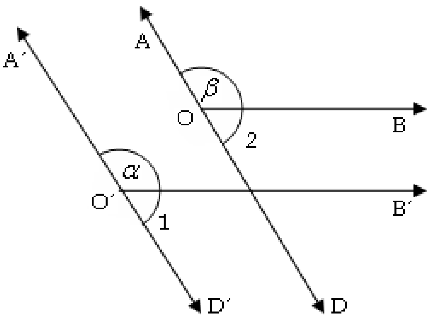
OA // O´ B´
OA // O´A´



Prolongando OB: $\left.\begin{array}{l}\alpha' = \angle 1 \\ \hline \alpha = \angle 1\end{array}\right\}$ (ambos son correspondientes entre paralelas)

Por lo que se comprueba que: $\alpha = \alpha'$

Caso 2: Ambos son obtusos

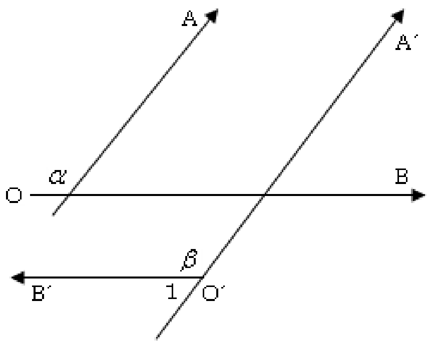


Prolongando OA y O´A´se obtiene que: $\boxed{\angle 1 = \angle 2}$
(Idéntico al caso anterior)

Como además: $\boxed{\begin{array}{l}\angle 1 + \alpha = 180^\circ \\ \angle 2 + \beta = 180^\circ\end{array}}$

Por lo tanto, ambos son iguales.
En consecuencia, los ángulos de lado paralelo, ya sean, ambos agudos o obtusos son idénticos.

Caso 3: Agudo con obtuso



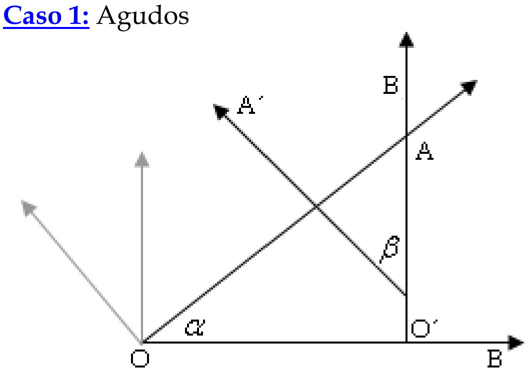
OA // O´ B´
OB // O´A´

Prolongando O´A´ se obtiene el mismo ángulo del caso 1.
Además, $\angle 1 + \beta = 180^\circ$ o bien: $\alpha + \beta = 180^\circ$

Dos ángulos que tienen sus lados respectivamente paralelos, uno agudo y otro obtuso son suplementarios (el sentido de estos no influye en absoluto).

Ángulos de lados perpendiculares

Caso 1: Agudos

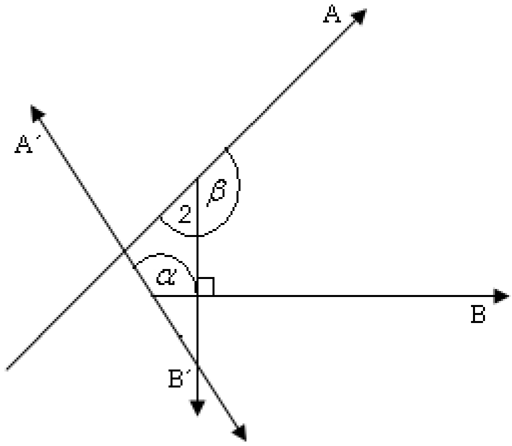


La regularidad que se cumple en este caso es:

$\boxed{\alpha = \beta}$

Porque $\alpha + \angle 1 = 180°$, y además,
$\angle 1 + \beta = 180^\circ$, lo que significa que
$\boxed{\alpha + \angle 1 = \angle 1 + \beta}$.

Caso 2: Obtusos



Como se puede ver:

OA ⊥ O´A´

OB ⊥ O´B´

Prolongando O´A´ se obtiene que los ángulos 1 y 2 sean idénticos.

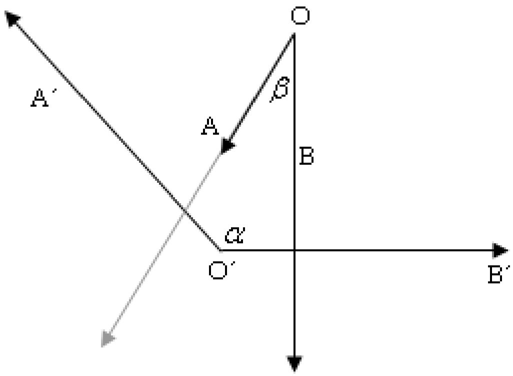
Como además: $\boxed{\begin{array}{l}\angle 1+\alpha=180^{o}\\ \angle 2+\beta=180^{o}\end{array}}$

$\boxed{\alpha+\angle 1=\angle 2+\beta}$

Por lo tanto: $\alpha=\beta$

En consecuencia, **dos ángulos agudos u obtusos que tienen sus lados respectivamente perpendiculares son idénticos** (la posición de estos no invalida la proporción).

Caso 3: Agudo con obtuso



OA ⊥ O´A´

OB ⊥ O´B´

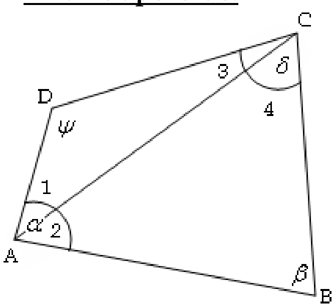
Prolongando O´A´ se obtiene el mismo ángulo del caso 1.

Porque $\beta+\angle 1=180^{o}$, y además, $\beta+\alpha=180^{o}$

Dos ángulos, uno agudo y otro obtuso que tiene sus lados respectivamente perpendiculares, son suplementarios.

Capítulo 3
Ángulos en los cuadriláteros

1. **En un trapezoide:**



Se deduce que: $\begin{array}{l}\angle 1+\psi+\angle 3=180^{o}\\ \angle 2+\beta+\angle 4=180^{o}\end{array}$

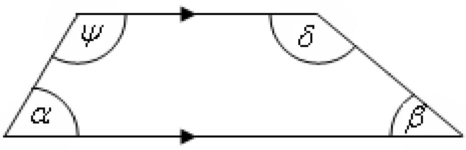
$$\angle 1+\angle 2+\psi+\beta+\angle 3+\angle 4=360^{o}$$

$$\boxed{\alpha+\psi+\beta+\delta=360^{o}}$$

Los ángulos interiores de un trapezoide suman 369º en total.

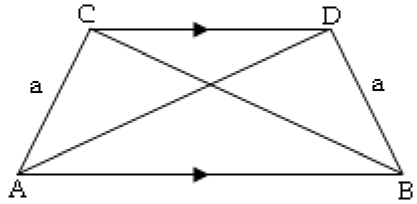
2. **En un trapecio:**

- De tipo escaleno:



$$\boxed{\alpha+\psi+\beta+\delta=360^{o}}$$

- De tipo isósceles:

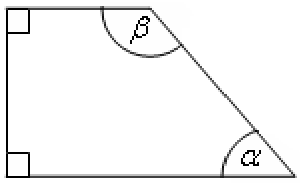


Comparando los triángulos:

$\Delta ABD \cong \Delta BAC$

DB y AC son diagonales iguales o congruentes, por lo que se puede comprobar que AE es igual que EB, así como DE lo es con EC.

- De tipo isósceles rectángulo:



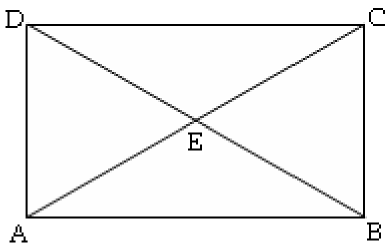
Tesis: $\alpha + \beta = 180^\circ$

En efecto: $90^\circ + 90^\circ + \alpha + \beta = 360^\circ$ (interiores de un cuadrilátero)

$\alpha + \beta = 360^\circ - (90^\circ 90^\circ)$

$\boxed{\alpha + \beta = 180^\circ}$

3. <u>En un rectángulo:</u>



Como se trata de otro caso particular de un paralelogramo, se tiene que AE = EC y DE =EB.

Pero como $\Delta ABD \cong \Delta BAC$ se muestra que:

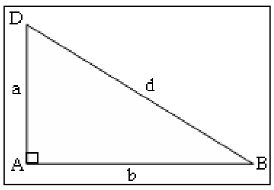
$$\begin{cases} \angle A = \angle B 090^\circ \\ AB = AB \\ AD = CD \end{cases}$$

También las diagonales son congruentes en este caso. Como E es el punto medio de dos rectas: AC y BD.

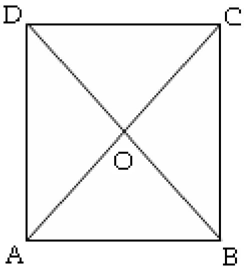
$\boxed{DE \cong EB \cong EA \cong EC}$

Por lo tanto, las diagonales se dimidian en cuatro trazos congruentes.

Además, en el triangulo ABD:



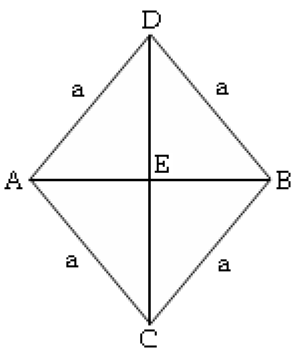
4. <u>En un cuadrado:</u>



Trazamos DB y AC. Se puede demostrar también que DB es igual a AC por analogía., además como AD y DC.

Todos los ángulos interiores del cuadrado miden 90º cada uno.

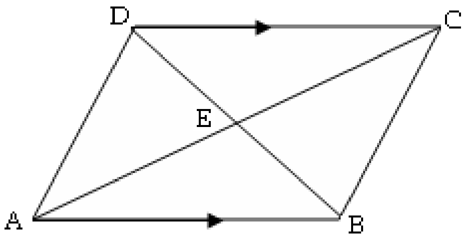
Las diagonales de un cuadrado cumplen con dos normas: son congruentes y se dimidian de manera perpendicular.



5. <u>En un rombo:</u>

Como se trata de otro caso particular de un paralelogramo, se tiene que DE =EB y AE = EC. Como además, el triangulo ABD es isósceles y E es punto medio de BD; entonces AE es transversal de gravedad y altura a la vez; de modo que $\Delta AED = 90°$
Las diagonales de un rombo se dimidian perpendicularmente.

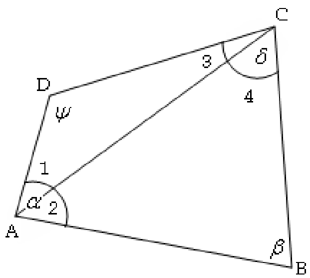
6. <u>En un paralelogramo:</u>

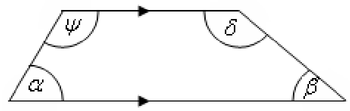


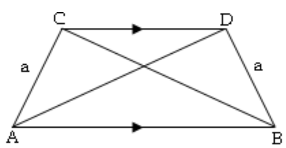
Las diagonales se dimidian
O bien E es punto medio de AC y de DB:

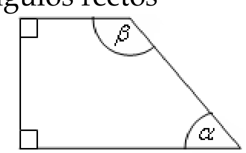
Advertencia: No todos los trazos son iguales.

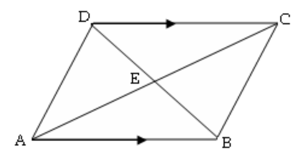
Cuadro comparativo de polígonos, sus respectivos ángulos interiores y sus medidas

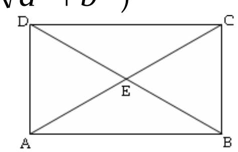
<table>
<tr><th>Trapezoide</th><th>Trapecios</th><th>Paralelogramos</th><th>Rectángulos y cuadrados</th><th>Rombos</th></tr>
<tr>
<td>
1. 4 lados distintos
2. 4 ángulos distintos
3. Cero paralelismo entre lados
4. Dos diagonales


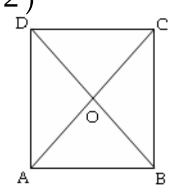
</td>
<td>
Escaleno
1. 4 lados distintos
2. 4 ángulos distintos
3. 2 lados paralelos(bases)
4. 2 diagonales


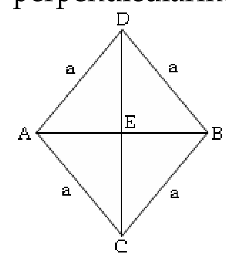
Isósceles
1. Lados no paralelos
2. Ángulos basales iguales
3. Diagonales iguales


Recto
2angulos rectos


</td>
<td>
1. Pares de ángulos en vértices opuestos iguales
2. Lados opuestos congruentes
3. 2 diagonales que se dimidian entre si


</td>
<td>
Rectángulo
1. 4 ángulos rectos
2. Lados paralelos e iguales
3. Dos diagonales iguales
(medida de la diagonal = $\sqrt{a^2+b^2}$)


Cuadrado
1. 4 ángulos rectos
2. 4 ángulos iguales
3. Lados paralelos
4. 2 diagonales iguales que se dimidian perpendicularmente
(medida de la diagonal = $a\sqrt{2}$)


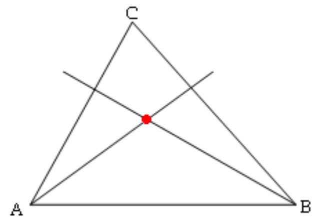
</td>
<td>
1. Pares de ángulos en vértices opuestos iguales
2. 4 lados iguales
3. 2 diagonales distintas que se dimidian perpendicularmente


</td>
</tr>
</table>

Capítulo 4

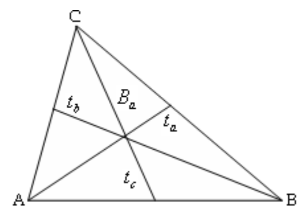
Rectas y puntos notables en el triángulo

1. **Alturas** (h): perpendicular bajada desde un vértice al lado opuesto. Las alturas de un punto se cortan en un punto denominado ortocentro (or).



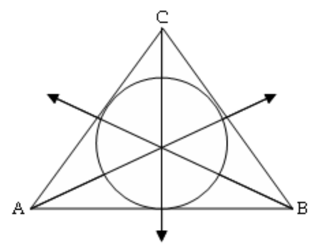
2. **Transversales de gravedad** (t): trazo que une el vértice con el punto medio del lado opuesto. Las transversales se cortan en un punto denominado baricentro (bi)

Baricentro es el centro de gravedad del triangulo)



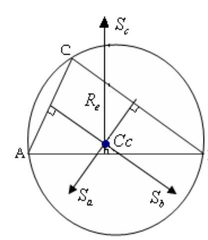
3. **Bisectrices** (b$\angle$): corresponde a las bisectrices de cada uno de los ángulos interiores. Las bisectrices se cortan en un punto llamado incentro (i) que es el centro de la circunferencia inscrita al triangulo.

Radio: distancia del incentro de un lado.

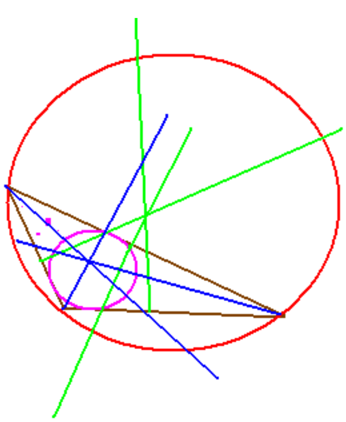


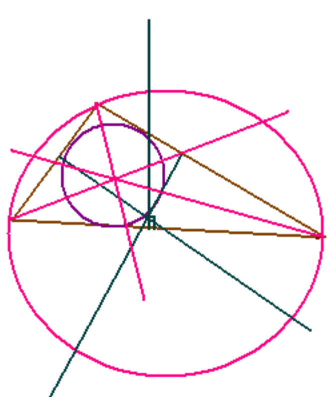
4. **Simetrales** (S): corresponde a la perpendicular levantada en el punto medio de cada lado. Las simetrales se cortan en un punto conocido como circuncentro (Cc) que es el centro de la circunferencia inscrita al triangulo.

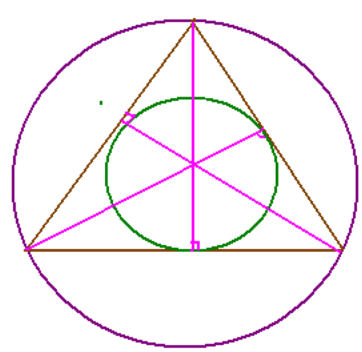
Radio: distancia del circuncentro a un vértice.



En los triángulos se indican a modo de ejemplonlas construcciones de las circunferencias inscrita y circunscrita

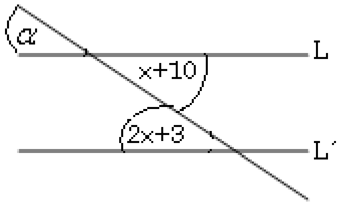




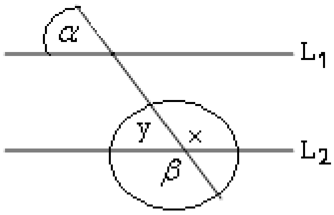


Listado de ejercicios

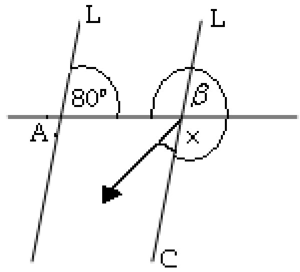
1. Si L es paralela con L´, ¿Cuánto mide α ?



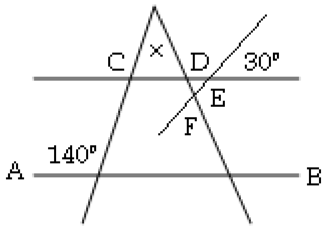
2. L_1 es paralela con L_2 y $\beta = 2\alpha$, entonces, ¿Cuánto vale 2x+y?



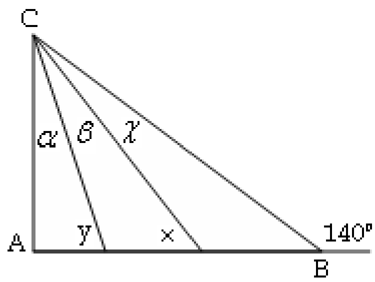
3. Si L es paralela con L´, y BE es la bisectriz del $\angle ABC$, calcule cuanto vale x.



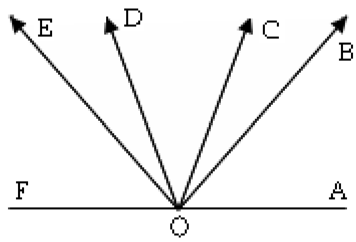
4. $\overline{AB}$ es paralela con $\overline{CE}\Delta\overline{EF}\perp\overline{DF}$ ¿Cuánto mide x?



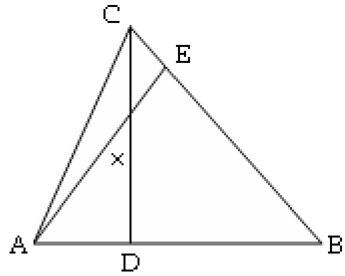
5. $CA \perp AB, \alpha = \beta = \gamma$ ¿Cuánto mide x e y?



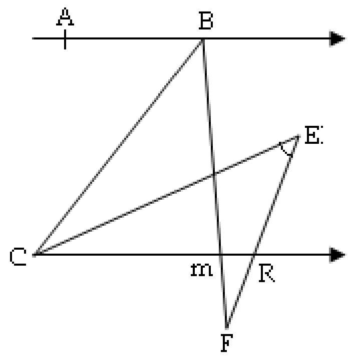
6. $\angle FOB = 150°$, OB, OD y OE son bisectrices y $\angle FOC + \angle COA = 180°$. ¿Cuánto mide el $\angle DOB$?



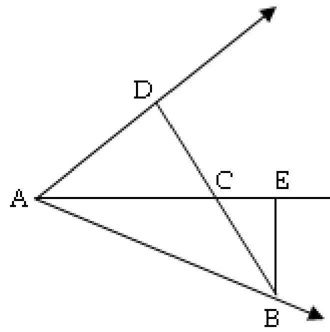
7. CD es la bisectriz del $\angle ACB$, $AE \perp BC\Delta CD = DB$ y $\angle ABC = 40°$. Calcule x.



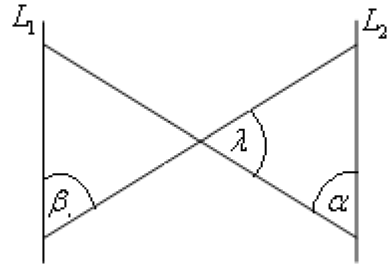
8. $AB \| CR, BF \perp CE, FE \perp CR$,CE es bisectriz del $\angle BCR$ y $\angle ABC = 45^\circ$ ¿Cuánto mide $\angle CMF$?



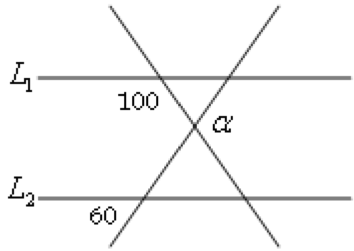
9. $\overline{AC} = \overline{CB}; AE \perp EB$ AC es bisectriz del $\angle BAD$ ¿Cuánto mide $\angle ADB$?



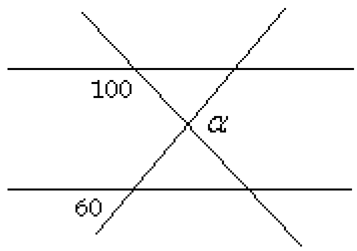
10. Si en la figura $L_1 // L_2$, $\lambda = 50^\circ$, entonces $\alpha = \beta$?



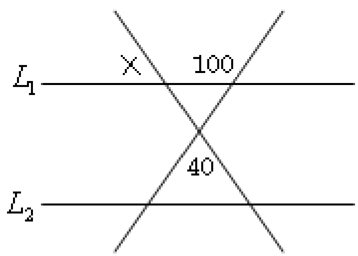
11. Si en la figura $L_1 // L_2$, entonces m$\angle\alpha = ?$



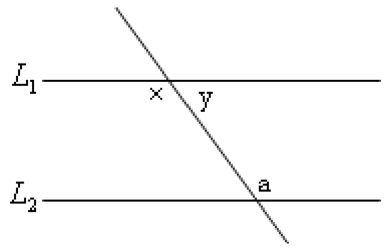
12. Si en la figura $L_1 // L_2$, la m$\angle x = ?$



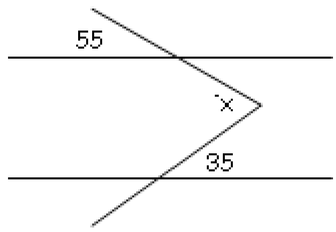
13. Si en la figura $L_1 // L_2$, x=2y, ¿Cuánto mide el $\angle\alpha$?



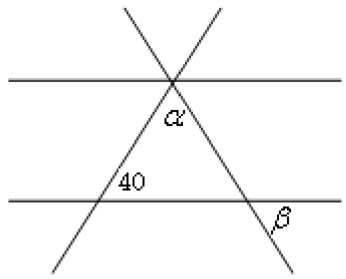
14. Si en la figura $L_1 // L_2$, ¿Cuánto mide el $\angle\alpha = ?$



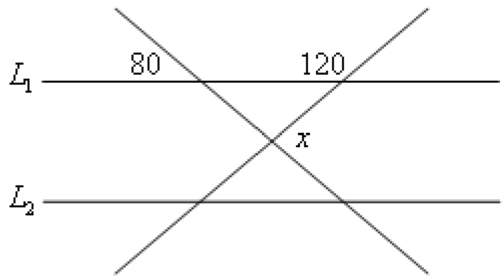
15. ¿Cuánto mide $\angle x$, si $L_1 // L_2$?



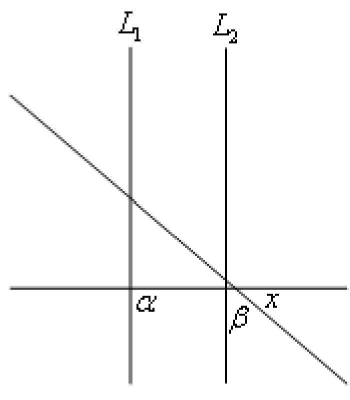
16. Si $L_1 // L_2$, $\alpha : \beta = 2:5$, entonces $\angle\alpha = ?$



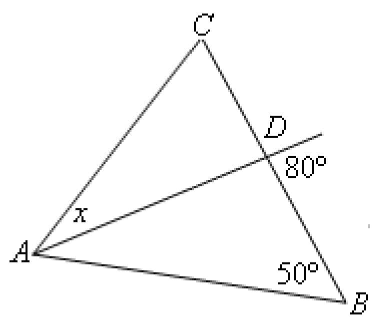
17. Si $L_1 // L_2$, ¿cuanto mide el ángulo x?



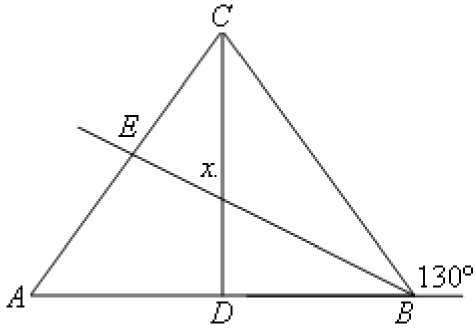
18. Si $L_1 // L_2$ $\alpha = 100°, \beta = 70°$, ¿cuanto mide el ángulo x?



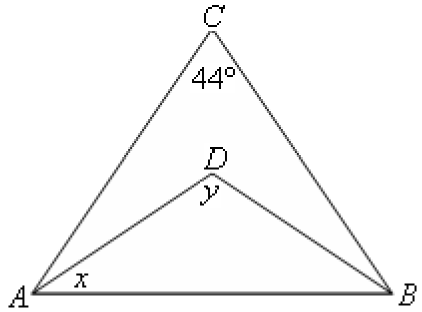
19. $\overline{AD}$ es la bisectriz del triangulo. ¿Cuánto mide X?



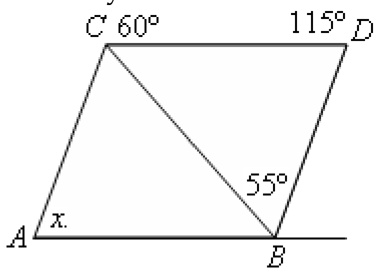
20. $\overline{AC}=\overline{AB}, \overline{BE}$ y $\overline{CD}$ son bisectrices del triangulo. ¿Cuánto mide X?



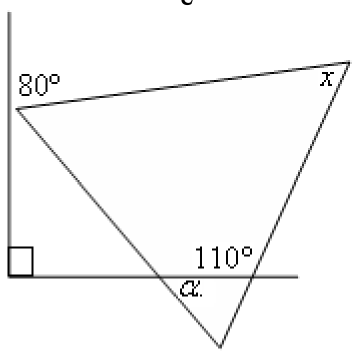
21. $\overline{AD}$ y $\overline{BD}$ son bisectrices del triangulo, $\angle B = \angle C = 10°$ ¿Cuánto mide X+Y?



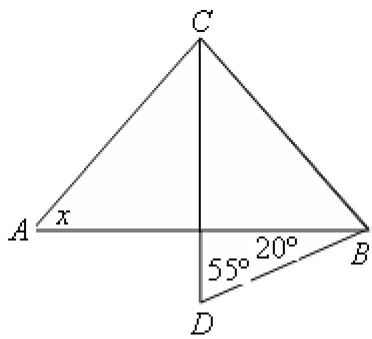
22. $\overline{CD}$ y $\overline{BD}$ son bisectrices. Calcule X.



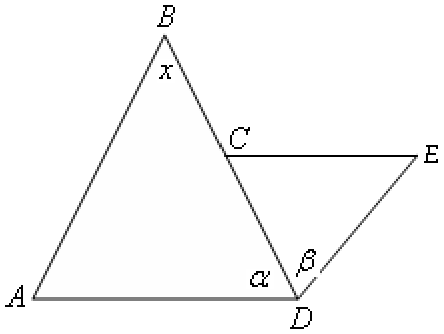
23. Si $\alpha = 30°$ ¿Cuánto mide X?



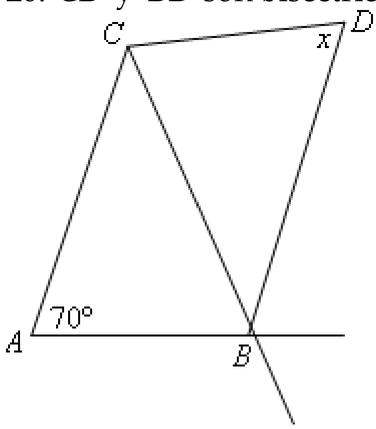
24. Determine el valor de X, si $\overline{CD}$ es bisectriz del $\angle ACB$



25. El triangulo ADB es isósceles de base $\overline{AD}$, y el triangulo CDE es equilátero, ¿Cuánto mide X, si $\alpha + \beta = 110^{\circ}$?



26. $\overline{CD}$ y $\overline{BD}$ son bisectrices. Calcule X.



27. Sea ABC un triangulo equilátero, $\overline{AE}, \overline{CE}, \overline{BD}$ y $\overline{CD}$ son bisectrices, entonces $\alpha + \beta + \gamma + \delta = ?$